

# Зачем школьнику XXI века доказательство Великой теоремы Ферма?

Марат Авдыев<sup>1,2</sup>, Marat Avdyev<sup>3</sup> SCM, Union<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Сибирский Центр медиации, Союз

<sup>2</sup>Физик, практикующий медиатор, Сибирский Центр медиации, Союз

<sup>3</sup>ХМАО-Югра, г. Сургут

## Аннотация

*В Десятилетие науки и технологий, объявленных Указом Президента РФ от 25 апреля 2022г. N 231 доказательство Великой теоремы Ферма, относимого к «математическим жемчужинам», имеет важное символическое, историческое и педагогическое значение. Необычайная красота и лаконичность формулировки заставляют искать столь же краткое доказательство. В Западном мире господствует предубеждение, что краткого доказательства Великой теоремы не существует. Но оказалось, что утверждение Пьера де Ферма — это не фигура речи, что его слова “о воистину чудесном доказательстве” следует понимать буквально школьнику XXI века, знакомому с основами логики, геометрии, размерности, теорией множеств. Математик вовсе не «заливал», говоря о возможности записи основных идей доказательства на полях книги.*

## Содержание

	<b>6</b>	<b>Цепь множеств из n-кубов</b>	<b>8</b>
	6.1	Слой вместо сферы . . . . .	8
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b>1.1</b>	1	<b>7.1</b>	10
<b>1.2</b>	2		
<b>1.3</b>	2	<b>8</b>	<b>11</b>
		<b>8.1</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>3</b>	<b>9</b>	<b>12</b>
<b>2.1</b>	3		
<b>2.2</b>	3	<b>10</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>4</b>		
<b>3.1</b>	4		
<b>3.2</b>	5		
<b>4</b>	<b>6</b>		
<b>4.1</b>	6		
<b>4.2</b>	6		
<b>4.3</b>	7		
<b>5</b>	<b>7</b>		
<b>5.1</b>	7		
<b>5.2</b>	8		

## 1 Введение

### 1.1 Обсуждаемые вопросы

Почему шар и куб гомеоморфны? И что такое гомеоморфизм? Какую роль играют однородность и изотропность пространства, симметрия в поисках математического доказательства? Почему в Великой теореме Ферма возникает фатальный конфликт между формой и содержанием? Обсудив эти вопросы, мы сделаем обобщения и выводы о фундаментальных свойствах нашей Вселенной.

В данной публикации приведено доказательство Великой теоремы Ферма (ВТФ) без математического формализма. Автор приводит версию краткого доказательства ВТФ с опорой на школьные знания преимущественно физики, информатики и др.

\*Эл. почта: marat@emediator.ru

Доказано: 05 Фев 2020, DOI 10.21661/г-560960. Интерактив-Плюс. Опубликовано в нов. редакции: Июль 09, 2024

школьных предметов. С позиции инженерного подхода понимание основ теории множеств и аксиом Евклида можно проиллюстрировать с помощью 3D-моделирования, конструирования и обобщить результаты на многомерное пространство.

Современная школьная программа далека от сбалансированности, она перегружена разрозненными фактами, сведениями. Просто поразительно как много изучается в школе и как мало применяются полученные знания на практике. Поиск наглядного, краткого доказательства ВТФ - это повод задуматься над системностью школьного образования, отвечающего нуждам XXI века в условиях острого противостояния России со странами объединённого Запада.

Школьники изучают слоистое строение Земной коры, теорему Пифагора, скалярное произведение векторов, закон сохранения вещества при химических реакциях, конгруэнтность фигур, симметрию. Ряд базовых понятий из высшей математики, например понятие однородности, изотропности пространства преподают на уроках природоведения, труда и физики. С помощью принципов симметрии поддаются решению задачи, требующие, в общем случае знание основ интегрирования и дифференцирования, решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Наконец, уроки черчения и астрономии, изучение памятников мирового культурного наследия, основ логики и философии — всё это поможет в поиске доказательства ВТФ с опорой на школьные знания. Налицо преимущества междисциплинарного подхода. Автор убеждён, что излагаемая в данной публикации краткая версия ВТФ способствуют концентрации внимания, стимулирует интерес к творческой учёбе у школьников и студентов. Закономерно враждебное отношение апологетов Западных стран к такому доказательству, поскольку оно оспаривает господствующие стереотипы о лидерских позициях США в точных науках. Но об этом будет сказано ниже.

## 1.2 Формулировка теоремы

Великая теорема Ферма была сформулирована Пьером де Ферма в 1637 г. Она утверждает, что следующее Диофантово уравнение:

$$a^n + b^n = c^n \quad (1)$$

не имеет решений в целых числах  $\mathbb{Z}$ , за исключением нулевых значений, для  $n > 2$ . Случай степени  $n = 2$  известен в школьном курсе под названием теорема Пифагора. Эйлер в 1770 году доказал теорему (1) для  $n = 3$ , Дирихле и Лежандр в 1825 году - для  $n = 5$ , Ламе - для  $n = 7$ . В 1994 году профессор Принстонского университета Энд-

рю Уайлс [1],[2] доказал (1) для всех  $n$ , но это доказательство, содержащее более ста страниц, понятно математикам, специализирующимся в области теории чисел и цилиндрических функций. Возникает проблема верификации доказательства американской версии.

## 1.3 Человеческий разум против искусственного интеллекта

Существуют ли короткие и простые способы доказательства Великой теоремы Ферма? Нужно ли для этого тратить сто или более страниц и прибегать к помощи искусственного интеллекта? Подразумевается пятисотстраничная работа японского математика Шиничи Мочизуки (Shinichi Mochizuki), занимающегося теорией чисел и арифметической геометрией в университете Киото, посвященную поиску доказательства ABC-гипотезы в теории чисел [3] - сравните с публикацией автора с доказательством ABC-гипотезы, уместившейся на нескольких стр. , ориентированной на старшеклассников физматшкол и студентов технического профиля [11]. Российские краткие версии доказательств обеих теорем в теории чисел основаны на "другом подходе о котором пишет Миньён Ким (Minhyong Kim), математик из Оксфордского университета, считает: "Использовать идеи физиков для решения задач теории чисел можно, но мы еще недостаточно хорошо продумали, как создать такую основу" [4]. И еще одна его цитата: "Мы находимся в точке, когда наше понимание физики достаточно зрело, и есть достаточно теоретиков чисел, заинтересованных в ней, чтобы сделать толчок" [4].

Ответ на вопрос, существует ли быстрый и простой способ доказательства Великой теоремы Ферма утвердительный. И этот способ включает в себя серию мысленных экспериментов, а также философское осмысление основ нашего мира.

Рассмотрим конструкцию из трех концентрических вложенных  $n$ -кубов или шаров с центрами в начале координат, ребра или радиусы которых равны натуральным числам  $a, b, c$ . Заметим, не меняя общности, что натуральные числа в формуле (1) связаны как  $a < b < c$ , а ситуация равенства ребер  $a = b$  исключена в силу иррациональности  $\sqrt[n]{2}$ . Случай отрицательных чисел можно рассмотреть путём переноса члена в другую часть уравнения (1) и замены переменных - достаточно доказать теорему для случая  $a, b, c \in \mathbb{N}_1$  (индекс 1 обозначает множество натуральных чисел, исключая ноль, в отличие  $\mathbb{N}_0$  в эпоху цифры, где те же массивы в ряде программных языков нумеруются с нуля) и обобщить результат на целые числа  $\mathbb{Z}$ .

## 2 Мысленные эксперименты

### 2.1 Сконструируй это!

Мысленный эксперимент - это гипотетическая ситуация, используемая для объяснения явления, через которые можно было бы получить результаты, если бы эксперимент действительно состоялся. Это ресурс воображения, обладающий достаточной логикой, чтобы можно было представить себе связные результаты.

Попробуем создать на основе ВТФ некоторую конструкцию. Рассмотрим проект состоящий из трёх вложенных центрированных  $n$ -кубов (шаров), а-Малый, б-Средний и с-Большой, общий центр которых совпадает с началом координат с рёбрами (радиусами)  $a, b, c \in \mathbb{N}_1$ , при условии следующего соотношения между объемами фигур:  $V(B_a^n) = V(B_c^n) - V(B_b^n)$ .  $V$  — это обозначение объёма. Заметим, что для  $n > 3$  вместо объёма следует использовать *меру*, определенную ниже.

Как вариант, можно использовать три концентрических шара, вписанных друг в друга с аналогичными радиусами  $a < b < c$ . Заметим, что любой куб можно путем непрерывных и обратимых деформаций (гомеоморфизм) превратить в шар и наоборот. В топологии такие фигуры называют гомеоморфными [Гл. 2 § 10, 4]. Поэтому ниже изложение переходит от  $n$ -куба к многомерному шару (в математике принято обозначение  $B_a^n$  где  $a$  — радиус шара,  $n$  — размерность пространства) тогда, когда это позволяет упростить изложение. Помним, что для  $n > 3$  вместо объёма следует использовать аксиоматически определяемое понятие меры, важным свойством которого является положительность значений и аддитивность, т. е. при объединении фигур меры складываются, что не просто удобно для физических измерений массы, длины, площади, объёма, но и выражает свойство материи нашего мира (например, закон сохранения количества вещества в ходе движения и при химических реакциях).

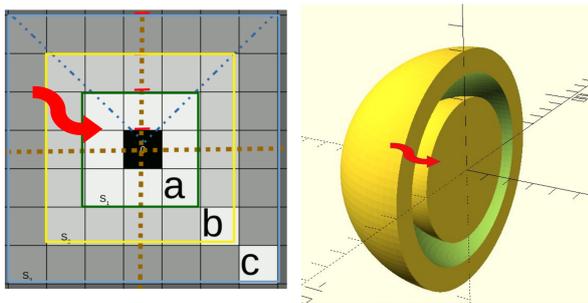


Рис. 1: Слева - концентрические  $n$ -кубы и справа - шары с целочисленными ребрами / радиусами  $a, b, c$

Вы получили конструкцию, не существующую в природе для случая  $n > 2$ , это удивительно!

Несложно убедиться в неосуществимости этого инженерного проекта. В самом деле, если конструкция на Рис. 1 существует, что обозначается квантором  $\exists$ , то в силу постулируемой однородности Евклидова пространства можно переместить, как это символизируют стрелки на Рис. 1, поменять местами, сопоставить  $\forall$ - любую точку / единичный куб из малого шара в соответствие другой точке / единичному кубу исследуемого подмножества пространства между средним и большим шарами так, чтобы не разрушить симметрию конструкции, не допустить неоднородностей либо пустот. Но эти подмножества (проще говоря части конструкции) не эквивалентны т. е. условие не исполнимо, где знак  $\setminus$  означает вычитание множеств, а знак  $\equiv$  - гомеоморфизм, о котором еще будет сказано ниже. На Рис. 1 справа использовано кросс-платформенное приложение OpenScad, которое помимо чисто инженерных приложений является прекрасным инструментом для изучения теории множеств, операций над множествами, ассоциативного закона. Самый обычный металлический молоток на деревянной ручке можно рассматривать как результат операций вычитаний над множествами difference, объединения - union, пересечение intersection ручки и собственно металлической части молотка. Учебных примеров кода программ предостаточно для наглядной изложения понятий множество, подмножество, универсальное множество  $U$ , пустое множество  $\emptyset$ , дополнение множества и т.д.. Не пора ли в XXI веке изучать в школе основы теории множеств через 3D моделирование?

### 2.2 Почему проект, иллюстрирующий ВТФ, не осуществим?

Препятствие заключается в том, что фигура, моделируемая формулой (1) должна обладать свойством центральной симметрии и не может содержать неоднородностей. Эти ограничения приводят к тому, что в результате каждый слой на Рис. 1 не сопоставим ни с каким другим слоем в пространстве размерностью  $n > 2$ . Условия аддитивности и аксиома меры здесь не работают — неправомерно сама постановка вопроса о послойном, поскольку это требует симметрия конструкции, сложении/вычитании / сокращения объемов. Математики Древней Греции ввели понятие несоизмеримости линейных отрезков, как например и 1. Здесь мы столкнемся с подобным, но и одновременно новым явлением. Убедимся, что преследуя условие равенства объемов подмножеств исследуемой конструкции  $V(B_a^n) = V(B_c^n) - V(B_b^n)$  и центральной

симметрии взаимно исключают друг друга.

В общем случае эти подмножества не эквивалентны. В этом и заключается основная идея доказательства. Препятствие заключается в том, что данная фигура обладает свойством центральной симметрии и не содержит неоднородностей. Другими словами, нельзя говорить о сложении/ вычитании / сокращении объемов. Математики Древней Греции ввели понятие *несоизмеримости* линейных отрезков, как например  $\sqrt{2}$  и 1. Здесь мы столкнемся с нечто подобным, но вместе с тем новым явлением. Убедимся, что арифметические операции сравнения или сокращения слоев здесь запрещены.

### 3 Глазами физика

#### 3.1 Симметрия. Изотропность и однородность пространства

Будем различать открытый шар и отхватывающую его сферу. Сфера является так называемым *слоем* для *закрываемого* им/ею шара или *n*-куба. Сфера имеет размерность на единицу меньше, чем шар. Это известно из школьных уроков математики. Вспомните формулы для длины окружности  $2\pi R$  и площади круга  $\pi R^2$ , площади сферы  $\frac{4}{3}\pi R^3$  и объема шара. Интересно представить, что в одномерном мире мы получили бы открытый шар в виде отрезка, исключая его конечные точки, или нульмерные сферы, расположенные на расстоянии  $r$  от начала координат. Ниже показана сфера размерности  $n - 1$ . Это тоже сфера, но меньшей размерности. Не случайно здесь стоит знак *гомеоморфизма*  $\cong$  фигур.

Представим себе, что мы рассекаем нашу *n*-мерную сферу гиперплоскостями, начиная с простого случая четырехмерного пространства. Что мы увидим? - Трехмерную сферу с центром в начале координат, как результат пересечения четырехмерной сферы с трехмерным *подпространством*  $\mathbb{R}^3$ . Различаются *открытые* Северное и Южное полушария, при этом экватор исключается. Экватор становится меридианом, если повернуть фигуру под прямым углом.



Рис. 2: Размерности полушфер и гиперплоскостей

Далее, для случая двумерной плоскости, открытой сферой становится привычный круг, исключая

уже рассмотренную одномерную сферу. Наконец, для 3D случая мы имеем обычный шар, напоминающий футбольный мяч, замкнутый 2D сферой или окружностью. Опять же, исключаем из сферы любой меридиан. В результате получится последовательность не пересекающихся геометрических элементов на сфере ряда размерностей от 1 до  $n-1$ . Это так называемые *гипермеридианы*, которые пригодятся нам в дальнейшем.

Теперь представим себе каскад непрерывно следующих сфер и меридианов, охватывающий каждую из этого множества. Если  $\exists$  - тройка натуральных чисел  $a, b, c$  (краткое обозначение достигается с помощью квантора *существования*  $\exists$ ), то в этом случае мы можем каждую точку пространства в этом интервале между средней и большой сферами отобразить в малую сферу  $k \int_b^c r^{n-1} dr = k \int_0^a r^{n-1} dr$ , где  $k$  - некоторый коэффициент, зависящий от размерности пространства  $n$ . В силу симметрии конструкции любое множество этих сфер может быть отображено в множество других сфер меньшего радиуса, число малых сфер, очевидно, должно быть больше в силу условия равенства объемов или эквивалентности отображения.

При объяснении интеграла преподаватели часто оперируют понятиями разбиения фигуры, шара  $B_r^n$  на отдельные части или дифференциала  $S_r^{n-1} \Delta n$ , (здесь  $\Delta n = 1$ ) как при разрезании лимона, которые затем собираются в единое целое. Но применение высшей математики здесь будет излишним. Достаточно записать приведенное здесь уравнение в терминах теории множеств и отношений эквивалентности. Заметим, что  $S^m \setminus S^{m-1} \cong \mathbb{R}^m, \dim(S^m) = m$ , где  $\mathbb{R}^m$  - размерность пространства  $m$ , см. Рис. 2 выше.

$$\{S_j\} \mapsto \{\dots S_i\} \quad (2)$$

это означает, что множество из одного элемента, содержащее единственный слой  $S_j$ , отображается на множество слоёв, содержащего несколько элементов  $S_i$  с помощью *функции эквивалентности*, при этом точка отображается в точку, элементарный куб - в элементарный куб:  $1^n \mapsto 1^n$ . Другими словами, существует некоторая функция эквивалентности  $F(X) \rightarrow Y$ , отображающая открытое множество  $X$  на множество  $Y$ . В отношениях эквивалентности каждый *образ* имеет *прообраз*.

В нашей конструкции множество непрерывно следующих друг за другом сфер с целочисленными радиусами, образуют открытые шары. В начальной школе мы изучаем текстуру спиленного дерева, слоистую структуру земной коры в разрезе, следы слоев на зонде, извлеченном из сверхглубокой скважины - все это примеры *индуцированной топологии*. Великая теорема Ферма исключает

ет существование такой симметричной конструкции при соблюдении условий эквивалентности и непрерывности. Почему? Чтобы понять этот феномен, необходимо проанализировать уравнение (2) по элементам:

Каждый слой содержит элементы размерностью от 1 до  $m = n-1$ . Здесь исследуемая структура заполнялась слоями от периферии  $j \dots i, (i-1)$  к центру, поэтому индексы перечислены в порядке убывания. Функция эквивалентности сопоставляет каждый элемент слоя  $S_j$  в отдельности с множеством элементов соответствующей размерности.

Обеспечить одновременное соответствие элементов слоя более чем по одной размерности невозможно из-за неразрешимости для  $n > 2$  сформулированной ниже системы из  $n-1$  уравнений, где  $i$  и  $j$  - натуральные радиусы концентрических сфер:

$$\begin{cases} j^{n-1} = i^{n-1} + (i-1)^{n-1} + \dots \\ \dots \\ j^2 = i^2 + (i-1)^2 + \dots \\ j = i + (i-1) + \dots \end{cases} \quad (3)$$

Каждое уравнение содержит два и более слагаемых справа. Этот ряд уравнений продолжается от  $n-1$  до степени 1. Любой элемент произвольной размерности может быть отображен функцией эквивалентности только на элемент той же размерности. Структура слоев определяется только размерностью пространства и не зависит от геометрического размера слоя.

Условие эквивалентности или равенства объемов (точнее *мощности* множества точек для любого  $n$ -мерного пространства) отображаемых слоев означает, что любой произвольный слой большой сферы может быть отображен на множество последовательно следующих малых сфер.

Число слоев в *образе* в правой части каждого уравнения  $\geq 2$ , поскольку 2 - натуральное число, следующее за 1. Это приводит к системе уравнений, которая неразрешима даже в вещественных числах  $\mathbb{R}$ . Это можно проверить с помощью *неравенства треугольника*  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  для Евклидова пространства, где сумма длин катетов прямоугольного треугольника больше длины гипотенузы. Случай равенства наступает только при нулевом катете и исключается по условиям Великой теоремы Ферма. Важно помнить, что в современном понимании под Евклидовым пространством подразумевается один из сходных и тесно связанных объектов: конечномерное вещественное векторное пространство введенным на нём положительно определённым скалярным произведением либо метрическое пространство, соответствующее такому векторному пространству.

### 3.2 Пифагоровы 3-ки существуют только на 2D плоскости

Пифагоровы тройки использовались для вычислений ещё древнейшей цивилизацией Шумеров за тысячелетия до рождения самого Пифагора для решения тригонометрических задач, включая сложение / вычитание углов. В чем особенности двумерной плоскости по сравнению с  $n$ -мерным пространством  $n \geq 3$ ?

Чтобы найти простейший ответ, можно воспользоваться старым добрым магнитофоном, в котором лента перематывается с левой катушки на правую или наоборот. В этом случае сумма площадей левой и правой бобины ленты остается постоянной и равна толщине ленты, умноженной на ее длину. Допустим, мы зафиксировали момент, когда левая катушка/ бобина имеет радиус  $j$  больший, чем правая  $i$ . Когда мы говорим о необходимости сохранения симметрии фигуры при непрерывном отображении или перемещении слоя, это означает, что один оборот ленты слева должен укладываться в целое число оборотов бобины справа: два, три, четыре и т.д., но не дробное число, иначе будет нарушено условие сохранения симметрии при перемещении или отображении слоев. Действительно, частично заполненный слой имеет дефект симметрии, он *асимметричен*. Если мы можем изготовить ленту любой толщины, то для любого заданного соотношения радиусов окружностей катушек мы легко добьемся симметрии в этой модели, а именно: один слой или виток на большой катушке эквивалентен множеству полных витков или слоев на малой катушке.

В общем случае, речь идет не об одном слое, а упорядоченном множестве слоев  $\{S_j \dots\} \mapsto \{\dots S_i\}$ . В прототипе  $S_j$  - первый элемент, а на изображении  $S_i$  - последний элемент. Из этого следует, что целочисленные радиусы слоев  $j > i$  должны быть не менее  $j = i + 1$ , иначе можно просто перемотать ленту или поменять катушки. При числе членов в системе уравнений (3) больше двух можно сосредоточиться на последней паре уравнений, где  $x^2$  - квадрат длины вектора, а  $x$  - проекция этого вектора на любую фиксированную ось, а затем, применив ассоциативный закон для членов одинаковой размерности, свести задачу к неравенству треугольника.

Отметим, что в случае  $n$ -куба (определение дано ниже) размерности 2 или, проще говоря, квадрата на плоскости картина аналогична. В силу симметрии удобно сосредоточиться на изучении единственного сегмента, образованного лучами, исходящими из двух соседних вершин, и применить формулу для площади трапеции по произведению длины средней линии на ее высоту (Рис. 3 справа).

n-Сфера	Элемент $S^m$ -гипермеридиан	...	Элемент $S^2$ -сфера	Элемент $S^1$ -окруж.	Радиус
$S_j^m$	$S_j^m \setminus S_j^{m-1}$	...	$S_j^2 \setminus S_j^1$	$S_j^1 \setminus S_j^0$	j
$\downarrow$	$\downarrow$	...	$\downarrow$	$\downarrow$	...
$S_i^m$	$S_i^m \setminus S_i^{m-1}$	...	$S_i^2 \setminus S_i^1$	$S_i^1 \setminus S_i^0$	i
$S_{i-1}^m$	$S_{i-1}^m \setminus S_{i-1}^{m-1}$	...	$S_{i-1}^2 \setminus S_{i-1}^1$	$S_{i-1}^1 \setminus S_{i-1}^0$	i-1
...	...	...	...	...	...

Таблица 1: Любая сферы из прообраза отображается в образ отдельно по каждому элементу.



Рис. 3: Эквивалентность слоев на 2D-плоскости для кругов и квадратов. Фотография грани авторского 3D-куба согласно заявке патента на пром. образец № 2021501435/49 от 20.03.2021

В результате сохраняются объем мера подмножества слоев, отображенного на множество последовательно и непрерывно следующих слоев, расположенного ближе к центру, и симметричная форма исследуемой конструкции. Что препятствует провести аналогичный эксперимент для случае трёх и более мерного пространства? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо кратко рассмотреть понятие теории множеств, функции непрерывности, метрической топологии, гомеоморфизма, попарно не пересекающихся классов эквивалентности.

## 4 Непрерывность. Гомеоморфизм. Классы эквивалентности

### 4.1 Непрерывность

Российская фигуристка Камила Валиева вызывает восхищение, грациозно исполняя плавный танец. Танец состоит из различных фигур, плавно переходящих друг в друга. Можно проиграть фильм задом наперед, исключая прыжки - отображения фигур обратимы. Аналогично, представьте себе некоторую функцию  $f(X) \rightarrow Y$ , отображающую открытое множество X на множество Y. У каждого образа есть прообраз. Выберем в образе открытую окрестность точки B, например, в виде шара. Предположим, что точка A полностью отображается на

эту окрестность точки B. Это и есть определение непрерывности. Пусть также существует обратная непрерывная функция  $f^{-1}(Y) \rightarrow X$ . Мы получили гомеоморфизм  $X \cong Y$ . Говоря о гомеоморфизме, отметим интересное преобразование кружки в тор и наоборот. В терминах топологической теории, понятия гомеоморфизма доказательство Великой теоремы Ферма сводится к невозможности построения трех определенных выше концентрических шаров с центром в начале координат и с целочисленными радиусами, так, чтобы  $B_c^n \setminus B_b^n \mapsto B_a^n$  в однородном (что означает отсутствие разрывов / пробелов между последовательно следующими слоями), симметричном пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Вместо стрелки в последнем выражении можно поставить знак  $\cong$ .

### 4.2 Теория множеств

3D-моделирование предоставляет широкие возможности для демонстрации операций пересечения, объединения и вычитания множеств. Вот обозначение пустого множества  $\emptyset$ . Вот обозначение универсального множества U. На диаграмме Эйлера-Вена универсальное множество соответствует всему прямоугольнику. Базовые знания о дополнении множества будут полезны. Шахматная доска - это хорошо известная иллюстрация Декартова произведения, обозначаемого как  $\times$ . Но почему только числа? Самый обычный металлический молоток на деревянной ручке можно рассматривать как результат операций различия над множествами, таких как объединение  $\cup$ , пересечение  $\cap$ , вычитание  $\setminus$  ручки и собственно металлической части молотка.

Автор призывает читателя обратиться к математическим форумам, онлайн-курсам и справочнику для получения начальной информации в перечисленных областях знаний.

При работе с трехмерными фигурами можно убедиться в преимуществах знания основ теории множеств и, кроме того, проверить действие ассоциативных правил, когда выражения можно переписать альтернативными способами. Например, смоделировать каскад слоёв / сфер, см. формулу (7) ниже.

### 4.3 Мощность множества и функция эквивалентности

Мощность множества - это не что иное, как количество элементов в нем. Это понятие легко понять на примерах. Рассмотрим множество  $A = \{\blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle\}$  треугольников и множество  $B = \{\star, \star, \star\}$  звезд. Эти множества называются *равномощными*, так как имеют одинаковое число элементов, обозначаемых этими символами  $A$  эквивалентно  $B$  или  $|A| \sim |B|$ . Легко видеть, что множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$  эквивалентно множеству целых чисел  $\mathbb{Z}$ , так как каждая пара:  $1 \mapsto \pm 1, 2 \mapsto \pm 2, 3 \mapsto \pm 3$  и так далее нумеруется одним числом. Такое множество называется *счетным*. Множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$  является счетным. И множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  также является счетным. Математик Георг Кантор предложил оригинальный способ обхода каждого рационального числа в виде дробного  $p$  делить на  $q$ . Представим себе бесконечный кинотеатр со строками - рядами  $p$  и столбцами - местами  $q$ . Контролер следует по бесконечному залу в поисках безбилетника, по диагоналям наискосок мест и рядов, например, стартуя с левого верхнего угла, он двигается по зигзагообразной линии, постепенно расширяя зону досмотра в виде наклоненного треугольника с растущей гипотенузой и катетами, расположенными вдоль сцены и левого края зала. Очевидно безбилетник в ряду  $p$  на месте  $q$  будет достигнут. Таким образом, множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  является счетным. В случае вещественных чисел  $\mathbb{R}$ , включающих иррациональные числа, которые не могут быть представлены в виде дроби, это не так.

Важно помнить, что, говоря об отношениях непрерывных и взаимно обратимых функций, мы можем сравнивать только пространства одинаковой размерности. Возьмем, например, карандаш. Можно представить себе точечный источник света, освещающий его сверху, и этот вертикально ориентированный карандаш отобразить в точку, но обратное преобразование из точки обратно в карандаш сделать нельзя, так как нарушается принцип взаимной однозначности. Антиподом взаимной однозначности является, например, определяемая аксиомой *мера*  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  над множеством или объем фигуры для трехмерного случая. *Мера* обладает свойством *аддитивности*, что не просто удобно для физических измерений массы, объема, но и выражает свойство материи нашего мира (вспомним закон сохранения количества вещества при химических реакциях).

## 5 Метрическая топология

### 5.1 Конструкция

Автор вынужден прибегнуть к теории множеств, бинарных функций и основам топологии [5, 6]. Совокупность множеств в виде открытых  $n$ -кубов  $e^n$  с центром в начале координат, т.е. *Декартово произведение* открытого отрезка  $e^1 = (-\frac{r}{2}, \frac{r}{2})$  определяет базу топологии  $\Omega$  в метрическом пространстве  $\mathbb{R}^n$  [п. 3. 1. в 4] Эквивалентная топология задается набором множеств в виде открытых шаров - различаются только их метрики:  $\max(x_j) < r$  для первого и  $\sum_1^n x_j^2 < r^2$  для второго [п.4.3. в 5]. Ниже под словами гиперкуб и слой будут также использоваться открытая сфера размерности  $n$ , радиуса  $r$   $B_r^n$  и ее замыкание - сфера  $S_r^{n-1}$  размерности  $n-1$  и радиуса  $r$ .

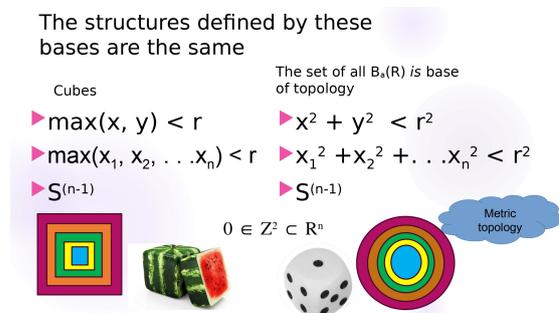


Рис. 4: Вложенные  $n$ -кубы и шары

Структуры, определяемые этими базами, совпадают. Говорят, что здесь определена метрическая топология, и задано метрическое пространство. С позиции топологии сфера и куб гомеоморфны, только немного деформированы. (Сравните кубический арбуз и округлый куб выше).

Представим себе вложенные друг в друга открытые шары. Сами сферы, *замыкающие* шар, не принадлежат к открытому шару. Для  $n$ -мерного случая все работает так же, но здесь вместо двух координат будет  $n$  координат. Сумма их квадратов остается меньше квадрата радиуса  $R$ . Для случая кубов картина принципиально не меняется, просто используется несколько иная *метрика*, где вместо квадрата подставляется функция максимального значения  $X$  или  $Y$  меньше радиуса  $R$ . Для случая  $n$ -мерного пространства у нас будет на два, а  $n$  слагаемых.

Аналогичную картину вложенных слоев, похожую на "Русскую Матрёшку можно наблюдать на двумерной плоскости *пронзание*  $n$ -куба. Мы хотели бы подчеркнуть именно *пронзание*, а не рассечение, поскольку из основ линейной алгебры легко понять, что куб рассекается такой плоскостью на два несвязных пространства. Но для пространств

размерности 4D, начиная с тессеракта, двумерная плоскость может быть замкнута сколь угодно малым непрерывным контуром, поперечным к ней. Картина напоминает *запеченное яблоко* на шпажке. Действительно, из курса линейной алгебры следует, что если  $AX = 0$ , то  $\text{rank}(X) = n - \text{rank}(A) = n-2$ , поэтому, начиная с 4D, плоскость можно продевать, как нитку в игольное ушко. К сожалению, этот очевидный факт не осознается некоторыми учеными, когда они сталкиваются с *цепью множеств* в виде  $n$ -кубов, вложенных друг в друга!

Для шаров ситуация самоочевидна. Ранее мы убедились (Рис 2, 4), что в топологии шар и куб гомеоморфны друг другу и легко превращаются друг в друга в результате деформации без разрыва пространства. Как установлено выше, на идеально гладкой однородной поверхности  $n$ -мерного шара существуют геометрические элементы всех размерностей от 1 до  $n-1$  - это гипермеридины.

Для случая  $n$ -куба размерности два или, проще говоря, квадрата на плоскости картина аналогична. Что мешает нам провести аналогичный эксперимент для случая трех и более мерного пространства? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо познакомиться с понятием *попарно не пересекающиеся классы эквивалентности*.

## 5.2 Не пересекающиеся классы эквивалентности

Взгляните на фотографию Тадж-Махала, памятника индийской архитектуры. Он обладает симметрией относительно вертикальной оси, проходящей через его центр. Симметрия является прекрасной демонстрацией работы функции эквивалентности, но есть и другие примеры: перемещение твердого тела, его вращение и так далее. Обратите внимание, что Тадж-Махал состоит из разных элементов: колонны отображаются в колонны, купола в купола, и никакого смещения нет. Другой пример - шахматы. Пока игра продолжается на паритетных началах, пешки обмениваются на пешки, легкие фигуры: слон, конь - на легкие фигуры, ладья обменивается на ладью, а ферзь - на ферзь. Это попарно не пересекающиеся классы эквивалентности. Функция эквивалентности работает с каждым классом отдельно, это легко доказать строго математически. И снова никакого смещения не происходит. Другими словами, отношения эквивалентности работают с каждым классом эквивалентности отдельно. Можно разложить слой на элементы разных размерностей и снова обратиться к табл. 1.

$$S| \sim = \{S_{n-1} \setminus S_{n-2}, \dots, S_2 \setminus S_1, S_1 \setminus S_0\} \quad (4)$$

(в частности, для  $n = 3$  это две полусферы, исключая окружность в плоскости  $(0, x, y)$ , окружность, исключаящая две конечные точки  $(0, 0, -r/2)$ ,  $(0, 0, r/2)$ ). Выражение  $S| \sim$  обозначает *факторизацию* слоя, полезную для анализа его элементов. Каждый из перечисленных классов имеет размерность подпространства, которому он принадлежит

$$S_m \setminus S_{m-1} \cong \mathbb{R}^m, \dim(S) = m. \quad (5)$$

Применим факторизацию к слою из нашей конструкции в виде трех концентрических сфер или  $n$ -кубов. Произвольно выбранный элемент любой размерности может быть отображен на элемент той же размерности с помощью функцией эквивалентности. Остановимся на слое формул  $\{S_j\} \mapsto \{\dots S_i\}$  в множестве слоев. Такая формула называется *ограничением* отношений эквивалентности на слой, как если бы набор был помещен туда с помощью трафарета. В силу сохранения центральной симметрии образ слоя также должен быть симметричным. Следовательно, образом будет множество последовательно и непрерывно следующих слоёв.

## 6 Цепь множеств из $n$ -кубов

### 6.1 Слой вместо сферы

Как уже говорилось выше, *a-Малый*  $n$ -куб  $a^n$  - это множество слоев, индексированных от 1 до  $k$ , *b-Средний*  $b^n$  - множество слоев от  $k+1$  до  $k + 1$  и *c-Большой*  $c^n$  - множество слоев от  $k+1+1$  до  $k + 1 + m$ , где  $k, l, m \in \mathbb{N}_1$ . Слой определяется как разность подмножеств  $S_i = e_i \setminus e_{i-1}$ ,  $i > 1$ , где  $e_i$  обозначает  $n$ -куб с ребром  $i$ . Ниже приводится полностью упорядоченное множество слоев (также называемое строго упорядоченным множеством, линейно упорядоченным множеством, обозначая отношения порядка  $\prec$ ):

$$e_0 \subset e_1 \subset e_2 \cdots \subset e_{k+l+m} \subseteq U \quad (6)$$

или

$$e_0 \prec S_1 \prec S_2 \cdots \prec S_{k+l+m} \in U \quad (7)$$

В качестве первого гиперкуба  $e_0$  может быть  $1^n$  или  $2^n$ , в зависимости от четности, но с учетом приведенных ниже рассуждений это не существенно. Разложение множества на подмножества мы рассматривали выше. Цепь множеств (6, 7) определяет топологию в  $\mathbb{Z}^n$ . С другой стороны, эта формула описывает одномерный зонд, пронизывающий три вложенных гиперкуба через общий центр. Результат *Декартова произведения* двух ортогональных зондов представлен на Рис. 1, слева - исследователь получит двумерную плоскость,

независимо от размерности пространства. Топология  $n$ -куба индуцирована на этом подмножестве, так как  $\emptyset \in \mathbb{Z}^n \in \mathbb{R}^n$ . Эффект параллакса отсутствует.

Размерность слоя  $n$ -куба можно увидеть из хорошо известного *бинома Ньютона*. Чтобы понять, из каких элементов состоит произвольный слой  $S_i$ , воспользуемся *треугольником Паскаля*, в котором коэффициенты  $C_n^m$ , число сочетаний записаны по строкам, и каждый коэффициент, за исключением крайних единиц, получается путём суммирования двух соседних, находящихся строкой выше, вот его первые строки: 1-2-1, 1-3-3-1, 1-4-6-4-1 и т.д. В результате старший член многочлена приведенного ниже исчезает, а степень многочлена понижается до  $n-1$ . Знак суммы  $\sum$  можно заменить на знак объединения  $\cup$ . Таим образом анализ структуры слоя дает следующее:

$$S_i = (i+1)^n - i^n = e_{i+1} \setminus e_i = \bigcup_{k=1}^{k=n-1} C_n^k i^k 1^{n-k} \quad (8)$$

Здесь  $i^k 1^{n-k}$  следует воспринимать как Декартово произведение отрезков. Посмотрите на этот угол (Рис. 5, слева). А это каскад углов (центр), которые вместе образуют куб (справа). Декартово произведение линейного отрезка на квадрат образует куб. Это свидетельствует о соблюдении принципа размерности. Приведенные выше формулы получены из бинома Ньютона и описывают плоскость как разность последовательных гиперкубов с **общей вершиной**, совпадающей с **началом координат**. Альтернативный способ представления исследуемой конструкции состоит в том, что **начало координат**, располагается в **общем центре** гиперкубов. Его можно получить путем  $n$  отражений гиперплоскостей, т.е. умножения на  $2^n$ , что принципиально не меняет сути формулы. Обе геометрические конструкции трансформируются друг в друга отражениями от гиперплоскостей, перпендикулярных каждой из  $n$  координатных осей, либо рассечением и масштабированием фигуры.

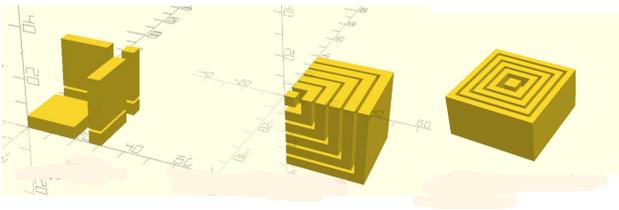


Рис. 5: Построение одного слоя (слева) и набора слоев в октанте (+, +, -)

Каждый слой гиперкуба имеет элементы размерности  $n-1, n-2, \dots, 1$  (гипер)граней, а ребра таких элементов описываются формулой  $i^k 1^{n-k}$  - обозначим такой параллелепипед более кратким синони-

мом *кубоид*. Если в полученном множестве убрать повторяющиеся элементы, т.е. сократить биномиальные коэффициенты, то результат полностью совпадает с формулой, полученной ранее для описания структуры сферы (7) - ещё одно наглядное выражение эквивалентности  $n$ -шаров и  $n$ -кубов.

В случае квадрата ( $n = 2$ ) на плоскости, см. выше Рис. 3 формулу для площади трапеции в виде произведению длины средней линии на ее высоту. Это убеждает, что на плоскости при работе функции эквивалентности сохраняется как объем - мощность подмножеств, так и симметричная форма конструкции, соблюдается непрерывность.

Важно помнить, что, говоря об отношениях непрерывных и взаимно обратимых функций, мы можем сравнивать только пространства одинаковой размерности. Обобщая вышесказанное, можно сделать вывод, что точка не может быть эквивалентна отрезку, отрезок - квадрату или кругу на плоскости, а эти последние фигуры - трехмерному кубу. Из рис. вытекает, что непрерывное, взаимно однозначное соответствие возможно лишь между фигурами одинаковой размерности. Тот же принцип применим и к дискретному пространству, состоящему из элементарных кубов. Это наглядная демонстрация *принципа соответствия* в науке. Термин "принцип соответствия" используется в более общем смысле для обозначения сведения новой научной теории к более ранней при соответствующих обстоятельствах, например, специальная теория относительности Эйнштейна сводится к классической механике при скоростях, малых по сравнению со скоростью света.

## 7 Аксиомы Евклида

Евклидова геометрия известна также как геометрия плоскости. В эпоху цифровых технологий мы можем дополнить постулаты Евклида элементами, полученными из элементарных кубиков  $1^n$ , выстроенных в **ряд, прямоугольник, 3D-куб** и так далее. (Заметим, что мы работаем в  $n$ -мерном пространстве!) Размерности созданных фигур будут такими же, как если бы мы имели дело с точками. Например,  $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$  согласуется с формулой, описывающей структуру слоя (8).

В дополнение к аксиомам Евклида [8] полезно проанализировать изученные нами конструкции с точки зрения аксиом топологии, которые хорошо изложены в ряде учебников, например, мы уже обсуждали понятие метрического и топологического пространства (см. рис. 4). Из аксиом топологии соответствие между точкой в пространстве  $R^n$  и элементарным  $n$ -кубом  $1^n$  в топологическом пространстве  $\Omega$  становится еще более ясным. Эле-

Фигура в $R^n$	Аналог в $Z^n$ - дискретном n-мер. пространстве целых	Размерность
Точка	$1^n$	0 или n
Отрезок	Множество $1^n$ , выстр. в ряд $i^1 * 1^{n-1}$	1
Плоскость	Множество $1^n$ , вылож. в плоск. $i^2 * 1^{n-2}$	2

Таблица 2: Постулаты Евклида в дискретном пространстве

менты  $1^n$  в топологическом пространстве могут быть созданы путем операций объединения, разности, Декартова произведения множеств с размерностью от 1 до n-1. Заметим, что оговорка 0 или n в первой строке последнего столбца табл. 2 означает, что в приведенной выше формуле (8)  $i^k 1^{n-k}$  кубоида множитель  $1^{n-k}$  не имеет размерности. Одновременно, изменяя масштаб, измельчая разбиение пространства получим:  $1^n \mapsto e^n$ , т.е. n-куб. Пространства различной размерности  $\Omega^n \cong \Omega^k$  гомеоморфны тогда и только тогда, когда  $n = k$ .

В самом деле, если теорема Ферма справедлива для троек целых чисел, то единицы измерения не имеют значения, будь то метры, сантиметры, миллиметры, микрометры, нанометры и т.д. Это означает не только равенство, но и тождественность уравнения Великой теоремы Ферма, или, другими словами, независимость результата от деления пространства. Единичный куб можно сделать сколь угодно малым, но суть явления от этого не меняется. Это важно для понимания как для данного студента, так и для студентов, не знакомых с математическим анализом.

Правомерно ли выделение фигуры из сферы  $S^2 \setminus S^1$ , ее произвольного  $\forall$  элемента - экваториального круга? - Это законный прием, известный из "Элементов" Евклида, сформулированных в III веке до н.э., и из школьных курсов геометрии, посвященных плоскости, стереометрии и черчению. Продолжим эту мысль. Стороны треугольника или другого многоугольника отображаются на элементы другой фигуры путем параллельного переноса/гомотетии/отражения от оси/плоскости, вращения и другими способами. Заметим, что если такое отображение обратимо, взаимно однозначно, то точка остается точкой, отрезок - отрезком (здесь размерность сохраняется). Представим себе правильную трехмерную пирамиду, и её образ, например, за счет голографии. Принцип эквивалентности здесь выражается в том, что пирамида-прообраз в целом отображается на пирамиду-образ, произвольно выбранная грань - на двумерную грань, одномерная грань - на одномерную грань. Черчение и архитектура основаны на этом принципе, который выдержал испытание временем на протяжении как минимум шести тысячелетий. Почему в данной ситуации мы не можем выделить гипермеридиан на сфере и ожидать,

что каждый из этих элементов будет отображен на множество элементов соответствующей размерности?

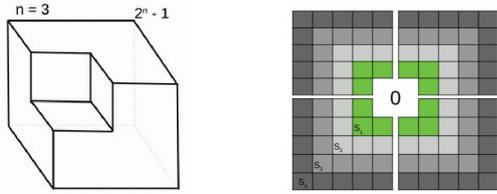
Когда мы работаем с декоративным материалом, например, с сайдингом для дома, принято измерять его в квадратных метрах  $i^2 1^1$ . Погонажные изделия, такие как перила или плинтуса, измеряются в метрах  $i^1 1^2$ . Но в действительности все перечисленные материалы имеют определенные размеры по длине, высоте и ширине. Однако меньшими размерами обычно пренебрегают. Из определения топологического пространства и постулатов Евклида следует, что единичный куб или  $1^n$  соответствует точке в пространстве размерности n. Все перечисленные фигуры состоят из таких единичных кубов. Они имеют размерность, привычную нам по аксиомам и определению топологии. Что такое аксиома в математике? - Это результат тщательного наблюдения или хорошо проведенного эксперимента.

Аксиомы Евклида и топологии основаны на принципах физики: однородность, изотропность, непрерывность пространства и симметрия.

## 7.1 Парадокс.

Из алгебраического разложения следует, что фигуры в форме куба с дефектом в виде отсутствующей точки, соответствующие выражению  $i^n - 1^n$  множество слоев или  $2^n - 1^n$  слой (в  $Z^n$  при условии центральной симметрии), безразличны к элементарным преобразованиям / отображениям, имеют размерность на единицу меньше, чем пространство, в котором эти фигуры созданы. Учитывая сказанное, таким выражениям и фигурам соответствуют  $B_r^n \setminus point$  или  $S_r^{n-1}$ . Однако только на плоскости возможно одновременное выполнение условий сохранения симметрии и равенства объемов, заложенных в теореме Пифагора.

Заметим, что  $2^2 - 1$  также является одномерной фигурой в центрально симметричном пространстве  $Z^2$ . Эта фигура слой за слоем отображается на одномерный периметр квадрата  $1^2$ . Такая ситуация является нормальной в силу условия эквивалентности лишь одного класса для  $n = 2$ . Размерность - это не тривиальный вопрос в математике. Существует замечательная визуализация фрактального множества Мальдерброта, которое



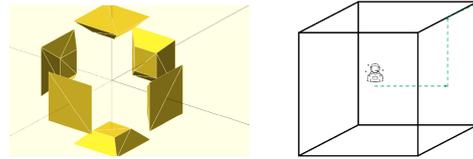
**Рис. 6:** Слева  $\dim(2^n - 1) = n-1$  в центрально симметричном  $Z^n$ . Справа пересечение дефект куба 2D плоскостью, преобразованное отражениями гиперплоскостей, перпендикулярных каждой из  $n$  коор. осей. Нарушение непрерывности следования слоёв.

определяется рекуррентной формулой, и такие фрактальные множества отличаются от привычных нам множеств тем, что при увеличении масштаба множества одни и те же черты повторяются бесконечно. Представьте, что вы смотрите на карту с высоты птичьего полета, потом вы спускаетесь вниз, приближаетесь к этому объекту, видите все больше и больше деталей, так вот в этих деталях видна более сложная структура, она все время повторяется. Здесь нет ни дуг, ни плавных кривых, ни прямых линий. С позиции определений данных в специальных курсах топологии размерность этого множества является дробной. Фрактальное множество Мальдерброта удивительно красиво!

## 8 Путешествие к вершине гиперкуба.

Некоторые уважаемые ученые возражают, что пронзание  $n$ -мерного куба двумерной плоскостью на Рис. 1 слишком просто и искажает сложную структуру этого куба. Такое недопонимание вызвано плохим представлением о том, что собой представляет  $n$ -мерный куб. Для исследования структуры  $n$ -куба снова применим метод постановки эксперимента в виртуальной реальности [6].

Астронавт Фёдор передвигается с помощью реактивного ранца в многомерном пространстве, чтобы совершить путешествие из начала координат и одновременно центра 10-мерного куба, грани которого ортогональны координатным осям, в заданную вершину гиперкуба. На движения, совершаемые космонавтом, налагались ограничения: разрешалось двигаться только по направлению или против направления любой из  $n$  координатных осей. Фёдор совершил  $n$  прыжков: первый - из начала координат в центр грани наибольшей размерности  $n-1$ , а все остальные - через первый прыжок. На каждом шаге или прыжке Фёдор изменял направление движения, поворачивая под прямым углом.



**Рис. 7:** Слева слоистая структура симметричного 3D-куба. Справа последние 3 шага на пути Фёдора к вершине

**Судовой журнал астронавта Фёдора** по результатам эксперимента выглядит например так:

- Стартую с Декеракта по направлению оси.
- Двигаюсь в Эннеракт по направлению оси.
- Двигаюсь в Октеракт против направления оси.
- Двигаюсь в Хептеракт по направлению оси..
- Двигаюсь в Гексеракт против направления оси..
- Двигаюсь в Пентеракт против направления оси.
- Двигаюсь в Тессеракт против направления оси.
- Двигаюсь в куб по направлению оси.
- Двигаюсь в квадрат по направлению оси..
- Двигаюсь в сегмент по направлению оси..
- Двигаюсь к вершине против направления оси.
- Финиш!

(Легко догадаться, что при существующих ограничениях движения по / против направления оси, Фёдор сможет свободно посетить  $\forall$  из  $2^{10} = 1024$  вершин гиперкуба.)

На последних трех шагах мы, как трехмерные существа, могли наблюдать внезапное появление Фёдора в центре трехмерного куба из невидимого нам четырехмерного пространства, затем прыжок в центр стены, потолка или пола - по усмотрению Фёдора, после чего из двумерного квадрата - прыжок в центр ребра и, наконец, последний шаг - прибытие в вершину.

Анализируя двумерный и трехмерный случаи и обобщая результат на  $n$ -мерный случай, легко вычислить длину по формуле  $\frac{i}{2}\sqrt{n}$  расстояния от начала координат до вершины, где  $i$  - ребро куба. Грань  $n$ -мерного куба лежит в гиперплоскости, перпендикулярной только что построенной высоте и проходящей через основание этой высоты - точку пересечения прямой с этой гранью. (Заметим, что с точки зрения Фёдора все грани  $n$ -мерного куба воспринимаются не как  $n$ -мерные, а как плоские фигуры. [6] ) Не меняя общности, мы можем расположить индексы координатных осей в порядке возрастания / убывания и получить следующий результат в виде бортового журнала космонавта Фёдора. В этом эксперименте Федор, начиная с центра десятимерного куба, двигался только в на-

правления (обозначается как 1) или против направления (обозначается как 0), последовательно исследовал все его грани размерности от девяти до единицы. Из основ комбинаторики легко видеть, что количество элементов - мощность множества, состоящего только из двоичных элементов ноль и единица, составляет  $2^n$  - ровно столько же, сколько вершин в n-мерном кубе.

Важно помнить, что Фёдор на своем пути наблюдал многомерные кубы с эффектом *параллакса*. Для объяснения этого эффекта можно привести ряд примеров из астрономии, повседневной жизни и произведений изобразительного искусства. Изображения n-мерного куба завораживают своей красотой. Представим себе проекцию n-мерного куба на двумерную плоскость, например, проходящую через оси X, Y, без эффекта параллакса. Какая фигура получится? Ответ показан на Рис. 1. Когда мы исследуем пронзание n-мерного куба двумерной плоскостью в виде Декартова произведения двух зондов, перпендикулярных к разным граням, - мы работали с индуцированной топологией.

На деле Фёдор исследовал вложенные топологические *подпространства*  $\emptyset \subset \Omega^1 \subset \Omega^2 \subset \Omega^3 \dots \subset \Omega$  в исходном n-мерном пространстве  $\Omega$ , все они проходят через начало координат, индекс сверху означает размерность подпространства. Например, в четырехмерном  $\Omega$ :  $\emptyset \subset (x, 0, 0, 0) \subset (x, y, 0, 0) \subset (x, y, z, 0) \subset \Omega$ . В каждом из подпространств *индуцирована* относительная топология: концентрические шары с общим центром в начале координат с радиусами, основанными на ряде натуральных чисел (рис. 4). Размерность шаров, m-кубов соответствует размерности подпространства. Для простоты можно представить последние три подмножества в этой цепочке: в 3D- 2D- 1D-подпространствах, соответственно: шар  $B^3$ , окружность  $B^2$ , линейный отрезок  $B^1$ .

## 8.1 Результаты

Для физика достаточно созерцать 3D куб с его гранями или глобус с его экватором, чтобы постичь доказательство Великой теоремы Ферма. Представим себе соответствующую выражению  $a^n = c^n - b^n$  конструкцию в n-мерном пространстве. Слева - симметричная фигура размерности n. Справа - множество слоев размерностью на единицу меньше. Это множество будет асимметричным, или иметь неустранимый дефект симметрии либо нарушение непрерывности слоев для размерности  $n > 2$  (см. Рис. 6 выше). Рассуждая об неустранимом дефекте симметрии, важно применять правила размерности, сопоставлять объемы (мощности) по каждому элементу слоя отдельно и далее воспользоваться неравенством треугольника. Сле-

довательно объекта, фундаментальные свойства которого описываются противоречивым образом  $\nexists a, b, c, \in \mathbb{Q}$  в природе не существует!  $B_a^n \cong B_c^n \setminus B_b^n$  В результате Великая теорема Ферма доказывается от противного.

Для исследования оказалось достаточно простых школьных инструментов: конструкции в виде обычного деревянного кубика для детского творчества, глобуса, шахматного набора, магнитофона на катушках, трафарета, прямоугольного треугольника и зеркала. Великую Теорему Ферма можно объяснить на пальцах: достаточно ощупать грани и ребра куба или обнаружить меридиан на глобусе, задаться вопросами симметрии, эквивалентности и сохранения размерности и меры сопоставляемых элементов. Эти простые инструменты также позволяют сделать вывод об асимметрии нашей Вселенной! И последний эксперимент, присмотритесь к лицу красивой девушки и заметьте, что человек, это дитя Вселенной, чтобы быть красивым, должен быть слегка асимметричным. С учетом миллиардов лет эволюции на Земле, случайно ли это или является воплощением более общих принципов развития Вселенной?

## 9 Вывод

Интересно, что в теориях концентрических сфер древних греков Евдокса, Каллиппа и Аристотеля Земля находилась в центре Вселенной и была окружена симметричными сферами, которые считались идеально симметричными. Но, оказывается, даже работая со своими симметричными сферами, легко убедиться, что эта конструкция не соответствует ни одному физическому объекту в природе. Такое явление в Древней Греции называли *апорией*, или логически непротиворечивыми конструкциями, которые ничему не соответствуют. Удивительно, что мы пришли к одному и тому же выводу и для случая работы с n-кубами, и с шарами.

Абсолютно симметричная Вселенная невозможна. Для возникновения материи, возможности химических реакций и зарождения жизни необходимо оперировать понятием объема/меры сохранением количества вещества. Эти условия обеспечиваются только в *слегка* асимметричном, анизотропном пространстве. При  $n > 2$ , такое невозможно в изотропном (центрально симметричном), однородном пространстве, что постулируется в аксиомах Евклидовой геометрии. Глубинная природа этого противоречия вытекает из фундаментальных физических свойств нашей Вселенной. Если бы она была идеально симметричной, подобно изученной конструкции концентрических сфер,

то в ней не могла бы возникнуть материя с присущими ей свойствами сохранения материи/меры.

Таким образом, исследуя Великую теорему Ферма, мы подошли к вопросам физики и мировоззрения, даже не применяя высшую математику, общую теорию относительности и сложные дифференциальные уравнения для иллюстрации принципов происхождения нашей Вселенной. Предположения, которые делались в рамках Евклидовой геометрии применительно к космическим масштабам, становятся неточными уже в неевклидовой геометрии. В анизотропном пространстве конфликт между формой и содержанием изучаемых нами структур конструктивно разрешается, но для этого необходимо отказаться от Евклидовой геометрии! Взгляните на портрет русского ученого Николая Ивановича Лобачевского, ректора Казанского университета, математика, который внимательно изучил пятый постулат Евклида, аксиомы которого мы рассматривали, и сформулировал свою, так называемую "воображаемую геометрию". Впоследствии эта геометрия была названа геометрией Лобачевского. Оказалось, что геометрия Лобачевского удивительно хорошо описывает понятие *пространственно-временной интервал*, преобразование Лоренца. Отголоски Большого взрыва проявляются в виде реликтового излучения, низкотемпературных фотонов с температурой 2,72 Кельвина, которые можно изучать с помощью новейшей аппаратуры и получать информацию об анизотропии нашей Вселенной.

И действительно, 1983-1984 годы российский реликтовый эксперимент подтвердил анизотропию реликтового излучения - "эха" Большого взрыва. Измерения проводились с помощью радиометра, разработанного в Институте космических исследований АН СССР, в группе Игоря Аркадьевича Струкова (общее руководство программой осуществлял академик Николай Семенович Кардашев) на запущенном спутнике "Прогноз-9". В 2006 году открытие российских ученых было "оценено по достоинству" присуждением Нобелевской премии по физике американцам Джорджу Смуту и Джону Мазеру за повторение результатов российских физиков, но с большей точностью. [9] Имена российских ученых остались в тени.

Между тем, предубеждение «международного математического сообщества» против изложенного краткого доказательства ВТФ транслируется некоторыми уважаемыми российскими учеными. Так в деле Верховного суда РФ [10] по спору автора с Роспатентом в связи с отказом в госрегистрации патента на промышленный образец по упомянутой на Рис. 3. заявке автора № 2021501435/49 от 20.03.2021, судебные акты были обоснованы с опо-

рой на шесть (!) лженаучных писем и одну ложную экспертизу, где была исследована лишь одна грань из шести, повторены голословные утверждения Роспатента в плагиате приведенного выше доказательства с американской версии [1, 2], базирующейся на цилиндрических функциях. Отказ в регистрации был сделан Роспатентом под надуманным предлогом «нарушения общественной морали и нравственности», вероятнее всего Западной морали, исключающей развитие России, как суверенного государства. Заметим, что морально-этические споры не подсудны Суду по интеллектуальным правам — нарушение п. 1. ст. 47 Конституции РФ. Сам промышленный образец экспертами даже не исследовался, доказательство, выгравированное лазером на кубе «не заметили», публикации, монографии в РИНЦ отрицались как «не солидные», критиковался «слишком простой английский». Такая откровенно заискивающая, прозападная позиция ученых далеко отступает от объективности и научности - ст. 14 ФЗ N 127-ФЗ "О науке и государственной научно-технической политике".

30 мая 2024 своим определением Конституционный суд РФ отказал автору в рассмотрении его жалобы, касающейся обнаружившейся неопределенности по вопросу соответствия Конституции РФ пункта 4 ст. 1349 Гражданского кодекса Российской Федерации (ГК РФ) в том конституционно-правовом смысле, в котором результаты интеллектуальной деятельности в научно-технической сфере, отвечающие установленным ГК РФ требованиям к промышленным образцам, оцениваются Роспатент с позиции соответствия общественным интересам, принципам гуманности и морали Западных стран, а не Российской Федерации. Отказывая в рассмотрении жалобы по существу, Конституционный суд, ссылаясь на решение Суда по интеллектуальным правам, пришёл к выводу, что размещенная информация на спорном промышленном образце "способна ввести в заблуждение но одновременно указал на отсутствие конфликта с моралью в данном деле. В чём же состоит такое "заблуждение" в деле? - вопрос риторический.

Всё это указывает на трудную предстоящую работу по развитию отечественной науки, инженерии и возрождению системы госрегистрации научных открытий, утраченной по реш. от 14 мая 1991г. N 156 Президиума Академии наук СССР. В этой остро состязательной ситуации автор был вынужден доказать АВС-гипотезу, из которой также следует доказательство ВТФ.

Таким образом, Великая теорема Ферма чрезвычайно полезна на школьных уроках физики, математики, правоведения, и педагогики.

## Список литературы

- [1] Annals of Mathematics, 141 (1995), 443-551  
Pierre de Fermat Andrew John Wiles Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem By Andrew John Wiles For Nada, Claire, Kate and Olivia
- [2] Nigel Boston University of Wisconsin - Madison  
THE PROOF OF FERMAT'S LAST THEOREM 397-405.
- [3] Mochizuki, Shinichi, Mochizuki's proof of ABC conjecture, Special issue on Inter-universal Teichmüller Theory. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences Vol 57 No. 1/2 2021
- [4] Kevin Hartnett. Secret link uncovered between pure math and physics. In quantamagazine.org, editor, Secret Link Uncovered Between Pure Math and Physics Dec. 1, page 24. Quanta Magazine, 2017.
- [5] Виро О. Я., Иванов О. А., Нецветаев Н. Ю., Харламов В. М. Элементарная топология. М.: МЦНМО, 2010. 352 с. ISBN 978-5-94057-587-0.
- [6] Белова Л.Ю. Элементы теории множеств и математической логики // Теория и задачи: учебное пособие / Ярославский госунивер. – 2012 – С. 26–27. – ISBN 978–5–8397–0878
- [7] Авдыев, М. А. 2.8. Диофантово уравнение и десятая проблема Гильберта в школе в эпоху цифровизации / М. А. Авдыев // Совр. в/о: идеи, технологии, результаты. – Ульяновск : ИП издательство "Зебра"), 2021. – С. 196-218. – EDN FKGSPB.
- [8] Начала Евклида, Книги II. Перевод с греческого и комментарии Д.Д.Мордухай-Болтовского при ред. участии М.Я.Выгодского и И.Н.Веселовского. Эвклид М. Л., ГТТИ, 1948. с. 123-142
- [9] Скулачев Д. П. Корреляция данных по реликтовому излучению в экспериментах WMAP и "Реликт-1" апрель 2010 Успехи физических наук 8(10) :392
- [10] См. карт/ арбитражных дел kad.arbitr.ru 300-ЭС23-19598С01-1179/2023СИП-947/2022
- [11] Авдыев М. А. Как школьнику доказать АБС-гипотезу на основе простых чисел, квантовой механики и творческого воображения: сборник трудов конференции. // Научные

исследования и современное образование : материалы Всерос. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 15 мая 2024 г.) / редкол.: В. И. Кожанов [и др.] – Чебоксары: Центр научного сотрудничества «Интерактив плюс», 2024. – С. 8-28. – ISBN 978-5-6051833-3-4. – DOI 10.21661/r-562378. Имеется исправленная и дополненная версия на сайте ниже.

Ссылка на сайт с источником публикации: Сайт Союз СЦМ [www.emediator.ru](http://www.emediator.ru).

## 10 Дискуссии

В ходе доказательства ВТФ математическими методами физические законы помогли в поиске подобно нити Ариадны. Впервые данная статья опубликована в материалах II Всеросс. науч.-практ. конф. Авдыев М. А. Зачем школьнику XXI века доказательство Великой теоремы Ферма?: сборник трудов конференции.

Наука, образование, общество: тенденции и перспективы развития : материалы II Всеросс. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 17 нояб. 2023 г.) / редкол.: В. И. Кожанов [и др.] – Чебоксары: Центр научного сотрудничества «Интерактив плюс», 2023. – С. 9-20. – ISBN 978-5-6050720-7-2. – DOI 10.21661/r-560960.

Провести обсуждение можно на форуме Сообщество ВК Физика для менеджеров